



Miguel Such

Ingeniero del ICAI, Promoción 2008.



Jesús R. Jiménez-Octavio

Ingeniero del ICAI, Promoción 2004. Actualmente es Investigador en Formación en el Instituto de Investigación Tecnológica.



Alberto Carnicero

Doctor Ingeniero Industrial del ICAI, Promoción 1995. Profesor del Departamento de Ingeniería Mecánica e Investigador en el Instituto de Investigación Tecnológica de la ETSI-ICAI.



Oscar López-García

Doctor Ingeniero Industrial. Instituto Universitario Ignacio da Riva. Universidad Politécnica de Madrid.

Comentarios a:
comentarios@icai.es



Modelado de estructuras de cables

Desde que el hombre aprendió a anudar y tejer fibras naturales, formando así las primeras cuerdas, las ha utilizado para construir estructuras. En un principio, éstas tan solo servían como herramientas de caza y pesca, pero posteriormente comenzaron a utilizarse con fines constructivos. Así, antiguas civilizaciones como la vikinga o la egipcia construían barcos provistos de redes para soportar y fortalecer sus velas; y las civilizaciones china e inca construyeron los primeros puentes colgantes para mejorar sus comunicaciones.

No obstante, es con el Renacimiento cuando empiezan a sucederse los hitos científicos referentes a las estructuras de cables de mano de los más conocidos físicos y matemáticos de la historia. En el siglo XV, Leonardo da Vinci había empezado a preguntarse cómo se comportaría un cable en tensión y, ya en alguno de sus trabajos, pueden encontrarse los primeros bocetos de una catenaria. En 1615, Beeckman diseñó un puente colgante suponiendo que la curva que éste adoptaba era una parábola. Esta solución innovadora

no fue ampliamente conocida hasta que, dos siglos después, volviera a ser descubierta por el ingeniero ruso Fuss, ahijado de Euler, a quien se encargó que diseñara un puente sobre el río Neva en San Petersburgo. Incluso Galileo afirmó en su *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze*, publicado en 1638, que la forma que debe adoptar una cadena al ser colgada entre dos puntos debe ser parabólica.

A mediados del siglo XVII el astrónomo, físico y matemático holandés Christian Huygens

ya sabía que Galileo estaba equivocado, aunque no conocía aún la solución al problema. En 1690 Jacob Bernoulli publicó *Acta Eruditorum*, documento en el que se explica por primera vez el concepto de integral. Para mostrar la potencia de la nueva herramienta de cálculo, Jacob propuso utilizarla para resolver definitivamente el problema al que Galileo no supo dar la solución correcta. Este reto fue resuelto *de facto* por tres personas: John Bernoulli (hermano de Jacob), Leibnitz y Huygens.

Bernoulli y Leibniz aplicaron el cálculo diferencial, por aquel entonces recién descubierto, y Huygens, por su parte, utilizó un método gráfico. Es difícil saber quién lo hizo primero, ya que las respuestas se publicaron en un corto espacio de tiempo y la mala relación entre los autores no facilitó la tarea. Los hermanos Bernoulli además formularon la ecuación diferencial de equilibrio de una cadena sometida a diferentes estados de carga. Huygens fue quien le dio el nombre de catenaria a la curva. Este nombre proviene de la palabra latina *catenarius*, que significa *cadena*. También se le llamó *funicular*, basado en la denominación latina para *cuerda*.

Clasificación de las "estructuras de cables"

Hoy en día el uso de los cables para la formación de estructuras se halla ampliamente extendido. Este fenómeno se explica al comparar el coste que suponen las estructuras rígidas con el desembolso, significativamente menor, que demandan las estructuras de cables.

Atendiendo a su configuración espacial, éstas se pueden dividir en tres grandes grupos: las estructuras de cables lineales, usadas generalmente en transporte, ya sea de energía o de objetos; las estructuras de cables planas, que gozan de una creciente popularidad debido a su belleza artística, y que se usan principalmente en edificaciones a modo de cubiertas (deben incluirse en este grupo las estructuras en forma de membrana); y, por último, las estructuras tridimensionales, las menos usuales y quizás las de menor interés práctico en la actualidad, a pesar de que en la naturaleza se encuentran muy a menudo mallas tridimensionales, compuestas por fibras flexibles con una infinidad de utilidades.

Estructuras lineales

Las estructuras de cables lineales tienen la característica de avanzar en una dimensión. En este tipo de estructuras cada cable

sólo conecta con otro cable en un punto, si bien, en algunos casos como en el de las catenarias ferroviarias, se forman mallas verticales. Entre las tipologías más habituales de este tipo de estructuras estarían las líneas para el transporte de energía eléctrica, las catenarias ferroviarias, los puentes colgantes, los arcos, o los sistemas de transporte por cable.

Estructuras planas

Una estructura de cables es plana cuando tiene forma de malla o membrana. Este tipo de estructuras, debido a su ligereza, cuenta con una rigidez específica bastante elevada. Como en los casos unidimensionales, gran parte de la rigidez inherente del sistema viene dada por la tensión de los materiales. La aplicación más común de este tipo de estructuras es su uso como cubiertas.

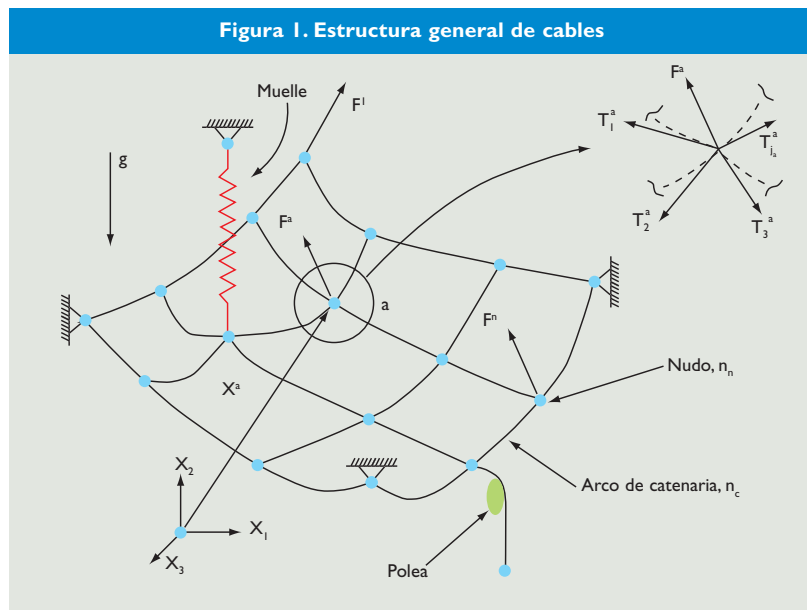
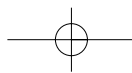
Estructuras tridimensionales

Las aplicaciones más relevantes de este tipo de disposiciones son las denominadas "Estructuras de Tensegridad". El concepto de tensegridad surge como principio estructural basado en el uso aislado de componentes en compresión dentro de una red de componentes en tensión. De esta forma los elementos en compresión no se tocan y los elementos en tensión definen el sistema espacialmente. Estas estructuras son muy utilizadas en arte, ya que la forma que describen una vez completadas es muy estilizada. En un ámbito más práctico, este tipo de estructuras establece el comportamiento mecánico de células y moléculas, así como el del ADN.

Cálculo de estructuras tensadas

En la mayoría de las estructuras, la configuración de referencia es conocida dado que ésta no depende de la distribución de las tensiones internas. En las estructuras tensadas, como son las formadas por cables, la configuración inicial depende de las tensiones internas, que son a priori desconocidas y que deben ser determinadas. La resolución de este problema constituye lo que se denomina problema de equilibrio inicial y es el paso previo a la obtención de la respuesta, ya sea estática o dinámica, de una estructura tensada frente a una acción exterior.

Una manera de clasificar los diferentes métodos de resolución consistiría en la diferenciación entre los parámetros especificados



por el calculista y los que son tratados como incógnitas a determinar. Los parámetros involucrados en un problema de equilibrio inicial son los siguientes:

- La topología de la estructura
- Las cargas externas
- La geometría de la estructura
- La distribución de las fuerzas internas

Inicialmente, el único requisito sobre la configuración de referencia es estar en equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio en el nudo 'a' de la malla de la Figura 1, al que llegan 'n' cables, pueden escribirse entonces de forma aproximada como:

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n T_{aj} \frac{x_1^j - x_1^a}{L_{aj}} + F_1^a = 0$$

$$\sum_{j=1}^n T_{aj} \frac{x_2^j - x_2^a}{L_{aj}} + F_2^a = 0$$

$$\sum_{j=1}^n T_{aj} \frac{x_3^j - x_3^a}{L_{aj}} + F_3^a = 0$$

Como el equilibrio inicial es un problema estático, cualquier configuración con la que se satisfagan las ecuaciones (1) en cada nudo será una solución del problema. Dependiendo del método de resolución que se emplee, las incógnitas de estas ecuaciones pueden ser las tensiones, las longitudes o las posiciones, lo que da lugar a diferentes soluciones.

Algunos métodos aproximados usados hasta la actualidad para la resolución de este

problema son el "método de desplazamientos no lineales" [1], "el método de la rejilla" [2] y "el método de la densidad de fuerza" [3]. Cada uno de ellos realiza alguna aproximación por lo que tan sólo son válidos para configuraciones concretas.

Método de desplazamientos no lineales

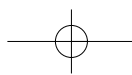
Este método se basa en la técnica de los elementos finitos para el análisis del comportamiento estructural con grandes desplazamientos. Con frecuencia, el mismo algoritmo se aplica en la resolución tanto de problemas de equilibrio inicial como de problemas en los que aparezcan cargas externas. Sin embargo, se ve aquejado de grandes desventajas ya que es preciso tensar previamente la estructura para aproximarse al equilibrio, lo que ralentiza enormemente el proceso al requerir varios cálculos consecutivos. Este método fue desarrollado para encontrar la forma de las cubiertas usadas en el estado olímpico de Munich, construido para las olimpiadas de 1972 usando barras para representar los cables en el modelo numérico.

El método de la rejilla

Este método de resolución de problemas de equilibrio inicial fue desarrollado para evitar los problemas asociados al método de los "desplazamientos no lineales". Con el fin de obtener un problema lineal equivalente Siev y Eidelmann propusieron en 1962 un método para la resolución de redes. Su método aplica restricciones de ortogonalidad sobre la geometría, las condiciones de contorno y la distribución de esfuerzos internos de la red, obteniendo como resultado un problema lineal cuya única incógnita es la altura de cada nudo.

Método de la densidad de fuerza

El método de la densidad de la fuerza permite abordar aquellos problemas sobre los que no se pueden aplicar restricciones de ortogonalidad. Nuevamente se obtiene un sistema lineal equivalente mediante un cambio de variable puramente matemático. Mediante ese cambio de variables se obtiene un sistema de ecuaciones lineales cuyo estado de equilibrio tiene la densidad de fuerza indicada en cada elemento sin necesidad de imponer ninguna otra restricción. Este método es apropiado para obtener una primera aproximación aunque, si se desea estudiar más a fondo la estructura, es



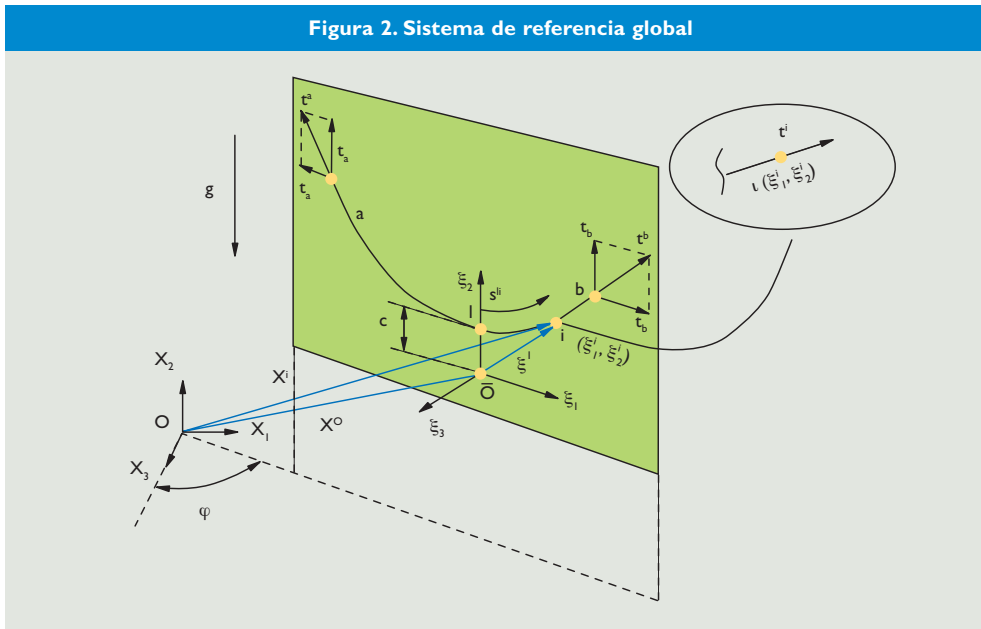
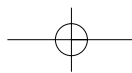


Figura 2. Sistema de referencia global

necesario aplicar un análisis posterior con otros métodos.

Método propuesto

La mayoría de los métodos de análisis estáticos de estructuras de cables, independientemente de la formulación que empleen, están desarrollados de forma específica para cada problemática. En el caso de cambiar alguno de los parámetros que definen el problema o tratar de extenderlos a otros tipos dejan de ser válidos. Empleando las ecuaciones clásicas de la mecánica, es posible establecer un método general de cálculo para estructuras de cables, completamente general, donde las incógnitas del problema pueden ser posiciones de los nudos, tensiones en los cables, parámetros de catenaria o longitud de los cables, todo ello dentro de un mismo problema. Las ecuaciones que modelan el comportamiento de un cable sometido a la acción de la gravedad se encuentran en los libros de mecánica clásica.

Referidas al sistema local $\langle O\xi_1\xi_2\xi_3 \rangle$, estas ecuaciones son

$$\xi_2^i = c \cdot \cosh \left(\frac{\xi_1^i}{c} \right)$$

conocida popularmente como ecuación de la catenaria y cuyo valor viene regido por el denominado parámetro de catenaria c . El valor de la longitud del arco entre el punto mínimo y un punto i es

$$s^i = c \cdot \sinh \left(\frac{\xi_1^i}{c} \right)$$

y la tensión en el extremo del cable

$$t^i = cw \cdot \sinh \left(\frac{\xi_1^i}{c} \right)$$

siendo w el peso por unidad de longitud.

Estas ecuaciones, a pesar de ser no lineales, resultan sencillas de manejar, en el caso de querer estudiar el equilibrio de un cable, o incluso el de sistemas sencillos de dos o tres cables. Sin embargo, en el caso de considerar sistemas tridimensionales con gran número de cables, las ecuaciones anteriores deben ser transformadas a un sistema de referencia global $\langle OX_1X_2X_3 \rangle$ de forma que se les pueda dar un tratamiento sistemático en tres dimensiones.

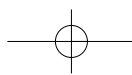
De esta forma, el comportamiento de un sistema de cables en tres dimensiones puede ser modelado mediante las siguientes ecuaciones:

$$E_1 \equiv s^{ab} - c (\sinh \lambda^b - \sinh \lambda^a) = 0$$

donde s^{ab} es la longitud del cable ab , incluyendo posibles efectos de la elasticidad del cable o alargamientos por temperatura, y λ^i es una función del parámetro de catenaria y las coordenadas globales del punto i . Calculando la tensión, t^a , en el nudo a del cable ab , se obtiene

$$E_2 \equiv \frac{t^a}{cw} - \cosh \lambda^a = 0$$

Las ecuaciones anteriores modelan el comportamiento de un solo cable en tres dimensiones. Para modelar sistemas más



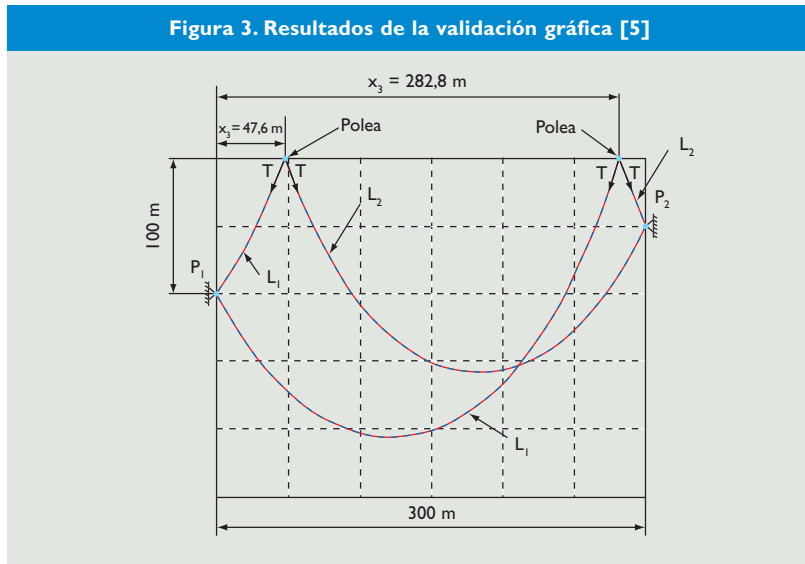
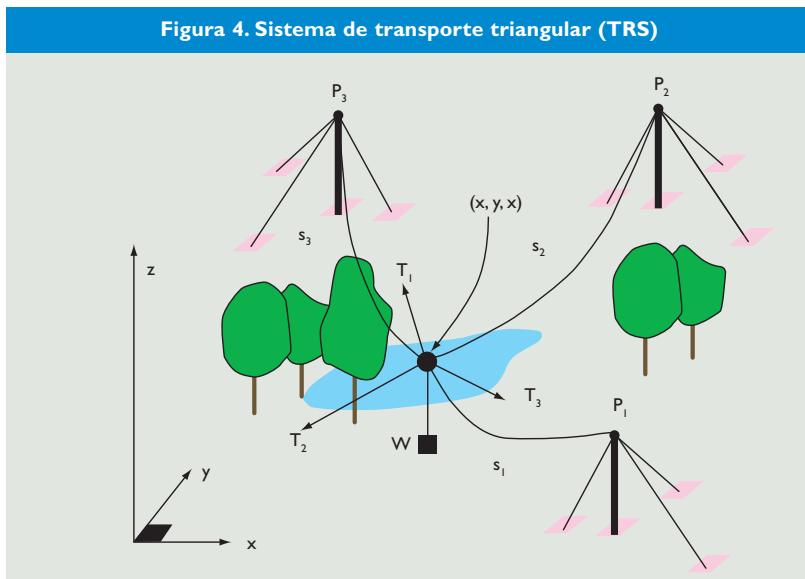


Tabla 1. Resultados de validación numérica [5]

| | Modelo | Referencia | Diferencia relativa (%) |
|--------------------|---------|------------|-------------------------|
| X ₃ [m] | 283.12 | 282.81 | 0.11 |
| S ₁ [m] | 447.22 | 446.37 | 0.19 |
| S ₂ [m] | 52.77 | 52.86 | 0.16 |
| T [N] | 1833.53 | 1830 | 0.19 |
| X ₃ [m] | 47.33 | 47.67 | 0.71 |
| S ₁ [m] | 110.96 | 111.07 | 0.1 |
| S ₂ [m] | 389.04 | 388.18 | 0.22 |
| T [N] | 1481.23 | 1478 | 0.21 |



complejos es necesario introducir una ecuación de equilibrio en los nudos. Dicho conjunto de ecuaciones puede ser expresado de la forma

$$E_3 \equiv \sum \bar{t} + \bar{F}$$

donde el vector \bar{t} representa las tensiones de los cables en coordenadas globales y \bar{F} las fuerzas exteriores.

Los grupos de ecuaciones anteriores no son suficientes para resolver el problema ya que se necesita la introducción de unas determinadas condiciones de contorno (tensiones, posiciones de nudos o longitudes de cables) de forma que el sistema de ecuaciones quede bien definido. Estas restricciones se imponen a través del conjunto de ecuaciones $E_4 (c_j, t_j^a, s_j^{ab}, X^a, X^b, F^a)$. De esta forma el sistema de ecuaciones que modela el comportamiento estático del cable j definido entre los nudos ab de la estructura es:

(2)

$$\begin{aligned} E_1 (s_j^{ab}, c_j, X^a, X^b) &= 0 \\ E_2 (t_j^a, c_j, X^a, X^b) &= 0 \\ E_3 (c_j, t_j^a, X^a, X^b, F^a) &= 0 \\ E_4 (c_j, t_j^a, s_j^{ab}, X^a, X^b, F^a) &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones involucran a las variables posición espacial de los nudos, tensión en el cable, longitud del cable y parámetro de catenaria. Todas ellas pueden ser empleadas como incógnitas del problema.

El sistema de ecuaciones resultante de ensamblar el grupo de ecuaciones (2) para cada cable y nudo de la estructura puede ser resuelto mediante técnicas habituales de resolución de sistemas no lineales como Newton-Raphson o métodos de región de confianza. La descripción detallada de la formulación del modelo y la verificación del mismo puede encontrarse en [4].

Aplicaciones

La validación del método se ha llevado a cabo mediante la comparación con problemas de estructuras de cables publicados anteriormente. Un problema conocido en este campo es el presentado por Bruno y Leonardi en [5]. En esta publicación se analiza la posición de equilibrio estático de un cable anclado en sus extremos y apoyado en una polea móvil en algún punto intermedio tal y como se muestra en la Figura 3. Lo que se pretende conocer con la resolución de este problema es: la localización horizontal de la polea para que el sistema esté en equilibrio; la longitud de cable que queda a ambos lados de la misma y; finalmente, la tensión que soporta la polea. Como

queda reflejado en la Tabla 1, la precisión del método queda patente en virtud las diferencias existentes entre los resultados obtenidos y los publicados por dichos autores, inferiores al 1%.

El método propuesto, no sólo ofrece garantías en cuanto a la precisión de los resultados se refiere, sino que gracias a su formulación semianalítica se reduce el número de incógnitas y optimiza la resolución numérica permitiendo una importante reducción de tiempo de computación. Esto se ha contrastado con los resultados presentados en [6] del primer análisis estático de un sistema de transporte triangular (TRS). El sistema, representado en la Figura 4, está compuesto por tres cables suspendidos desde tres torres y conectados en un punto móvil del que podrá colgar una carga. Su principal utilidad es el traslado de objetos en áreas forestales o de alto valor ecológico. Adicionalmente, la versatilidad del método permite seleccionar las incógnitas de entre todas las variables del sistema y realizar un control directo e inverso. Esto dota al método propuesto de una flexibilidad que lo hace más potente que el resto de los modelos existentes hasta el momento sin pérdida de precisión, como se ve en la Tabla 2.

Inciendo en la versatilidad de este método es preciso destacar la fácil incorporación de dispositivos mecánicos en estructuras 2D o 3D indistintamente. Un problema clásico para contrastar este tipo de modelos es el publicado por Peyrot y Goulois en [7] representado en la Figura 5. Se trata de una estructura sencilla que consta de tres cables elásticos unidos en un punto en el que están soportados por un muelle vertical. En el punto de unión se aplica adicionalmente una carga de 1000N en el plano horizontal y todos los cables están sometidos a variaciones de temperatura. Con el método presentado es posible conocer la posición de equilibrio final de todos los puntos de la estructura, además de la del punto de unión, las tensiones en los cables, etc. Los resultados coinciden con los obtenidos y publicados anteriormente utilizando otros métodos con diferencias inferiores al 0.4 %.

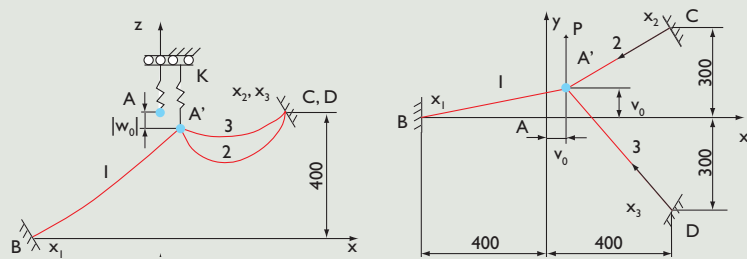
Conclusiones

El método para el cálculo del equilibrio estático de estructuras de cables presentado se ha demostrado válido para la mayoría de las aplicaciones ingenieriles tales como

Tabla 2. Resultados de validación numérica del TRS

| | | Kanzaki | Modelo | Diferencia relativa % |
|--------------|-------|---------|---------|-----------------------|
| Tensión [N] | T_1 | 3200 | 3199.90 | 0.003 |
| | T_2 | 2994 | 2994.10 | 0.002 |
| | T_3 | 4069 | 4069 | - |
| Posición [m] | x | 145.50 | 145.50 | - |
| | y | 610.30 | 610.30 | - |
| | z | 751.60 | 751.58 | 0.003 |
| Longitud [m] | S_1 | 418 | 418.06 | 0.060 |
| | S_2 | 193.70 | 193.70 | 0.005 |
| | S_3 | 149.30 | 149.23 | 0.069 |

Figura 5. Sistema 3D de cables [7]



catenarias ferroviarias, sistemas de transporte de energía eléctrica, redes de metro, funiculares, etc. Además, se ha contrastado con ejemplos publicados en la literatura científica poniendo en valor su precisión, rapidez y flexibilidad. ■

Referencias

- [1] J. H. Argyris, T. Angelopoulos, and B. Bichat. A general method for the shape finding of lightweight tension structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3(1):135-149, 1974.
- [2] A. Siev and J. Eidelman. Stress analysis of prestressed suspended roofs. *Journal of Structural Division, ASCE*, 90:103-121, 1964.
- [3] L. Grundig and J. Bahndorf. The design of wide-span roof structures using microcomputers. *Computers and Structures*, 30(3):495-501, 1988.
- [4] M. Such, J.R. Jimenez-Octavio, A. Carnicero y O. Lopez-Garcia. An approach based on the catenary equation to deal with static analysis of three dimensional cable structures. Enviado a publicación a *Engineering Structures*.
- [5] D. Bruno and A. Leonardi. Nonlinear structural models in cableway transport systems. *Simulation Practice and Theory*, 7(3):207-218, 1999.
- [6] K. Kanzaki and T. Sakai. Studies on the cable crane hung at three supports (I)(I) A way of calculation supposing static balanced state. *Journal of the Japanese Forestry Society*, 54:103-112, 1972.
- [7] A.H. Peyrot and AM Goulois. Analysis of cable structures. *Computers and Structures*, 10(5):805-813, 1979.